

Gaj Vidmar, Jakob Peterlin

Ustreznost ocene standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona za kontrolno karto v primeru avtokoreliranih podatkov

Povzetek. Prispevek uvodoma povzame matematične osnove ocenjevanja standardnega odklona, nato pa predstavi ocenjevanje standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona. Gre za pristop, ki je uveljavljen na področju statističnega nadzora procesov oziroma izdelave kontrolnih kart, na ostalih področjih statistike pa je manj znan. Opravljene simulacije imajo skupaj s priloženima interaktivnima elektronskima preglednicama predvsem poučen namen, kažejo pa tudi na uporabnost predstavljenega pristopa za procese s »skakajočim« povprečjem, za katere je značilna visoka pozitivna avtokorelacija. V primeru visoke negativne avtokorelacije v smislu »nihajočih« podatkov pa se ocenjevanje standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona z vidika nadzora procesov obnese še slabše od običajne cenilke standardnega odklona.

Glavne besede: razpršenost; verjetnostne porazdelitve; statistični nadzor procesov; cenilke; avtokorelacija; simulacije; elektronske preglednice.

Feasibility of Estimating Standard Deviation from Average Moving Range for a Control Chart in the Case of Autocorrelated Data

Abstract. The paper initially summarises the mathematical foundations of estimating the standard deviation, and then presents the estimation of the standard deviation based on average moving range. That approach is well-established in the field of statistical process control (i.e., design of control charts), but is less known in other areas of statistics. The performed simulations, together with two accompanying interactive electronic spreadsheets, are primarily intended for educational purposes, but also demonstrate the usefulness of the presented approach for processes with a "jumping" average, which are characterised by high positive autocorrelation. In the case of high negative autocorrelation in the sense of "oscillating" data, the estimation of standard deviation based on average moving range performs for process-control purposes even worse than the usual standard deviation estimator.

Key words: variability; probability distributions; statistical process control; estimators; autocorrelation; simulations, spreadsheets.

■ Infor Med Slov 2024; 29(2): 37-42

Institucije avtorjev / Authors' institutions: Medicinska fakulteta, Univerza v Ljubljani (GV, JP); Univerzitetni rehabilitacijski inštitut Republike Slovenije Soča, Ljubljana (GV); Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Univerza na Primorskem, Koper (GV).

Kontaktna oseba / Contact person: prof. dr. Gaj Vidmar, URI Soča, Linhartova 51, 1000 Ljubljana, Slovenija. E-pošta / E-mail: gaj.vidmar@ir-rs.si.

Prispelo / Received: 26. 2. 2025. Sprejeto / Accepted: 22. 6. 2025.

Uvod

Kdor se je srečal s statistiko, se je skoraj zagotovo srečal tudi s standardnim odklonom (*ang.* standard deviation). Gre za razmeroma preprost pojem, a v statistiki (in drugod) se za stvarmi, ki so videti preproste (in zato ne posebej zanimive), pogosto skriva marsikaj kompleksnega in vrednega pozornosti. Poglejmo, kako je s standardnim odklonom ...

Standardni odklon

Standardni odklon je mera razpršenosti slučajnih spremenljivk, ki je definirana kot koren variance. Če imamo na razpolago n podatkov (matematični bi dodali, da gre za vrednosti diskretne slučajne spremenljivke, ki imajo enako verjetnost biti izbrane), standardni odklon torej izračunamo kot koren povprečnega kvadriranega odklona od populacijskega povprečja:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}}.$$

Najpreprostejšo cenilko populacijskega standardnega odklona na podlagi vzorca velikosti n dobimo tako, da vsoto kvadriranih odklonov od vzorčnega povprečja (t. i. vsoto kvadratov) delimo z n . Ta cenilka je sicer konsistentna (z naraščanjem velikosti vzorca v neskončnost se približuje populacijski vrednosti) in za normalno porazdelitev ustreza kriteriju največjega verjetja (*ang.* maximum likelihood), a je pristranska. Zato je znana tudi kot nepopravljena cenilka (*ang.* uncorrected) ali vzorčni standardni odklon (*ang.* standard deviation of the sample), saj jo izračunamo tako, kot da bi vzorec predstavljal celotno populacijo:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

V statistični praksi za oceno standardnega odklona številske spremenljivke običajno uporabljamo cenilko, ki jo imenujejo popravljena (*ang.* corrected) ali Besselova (po vsestranskem nemškem učenjaku iz 19. stoletja). Cenilka je koren nepristranske cenilke populacijske variance, a sama še vedno ni nepristranska. Izračunamo jo tako, da korenimo vsoto kvadratov, deljeno z $n - 1$:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Resnično nepristranske cenilke standardnega odklona, ki bi bila uporabna za poljubno porazdeljeno zvezno slučajno spremenljivko, ni. Za normalno porazdelitev se da pristranost (*ang.* bias) običajne cenilke izračunati na podlagi Cochranovega izreka,¹ a

izpeljava presega namen in matematično raven pričujočega prispevka. Za praktične namene je bistveno, da obstaja preprost in dober približek tega popravka, ki ga imenujejo približno nepristranska (*ang.* approximately unbiased) cenilka, pri kateri vsoto kvadratov namesto z $n - 1$ delimo z $n - 1,5$:²

$$s_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1,5}}.$$

Cenilka na podlagi povprečnega drsečega razpona

Na področju statističnega nadzora procesov (SNP; *ang.* statistical process control) se za izdelavo kontrolnih kart (*ang.* control charts) praviloma uporablja cenilka standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona. Izhaja iz dejstva, da je razpon vrednosti v vzorcu (tj. razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo, označena z R) sorazmeren s standardnim odklonom. Če se omejimo na normalno porazdelitev in obravnavamo povprečni razpon (tj. asimptotično povprečje razponov vzorcev iz iste populacije), je to sorazmerje premo, pri čemer se v literaturi o SNP za sorazmernostno konstanto uporablja oznaka d_2 :

$$\bar{R} = d_2 s.$$

Vrednost d_2 je odvisna od velikosti vzorca. Če s $\Phi(z)$ označimo kumulativno standardno normalno porazdelitev

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt,$$

velja

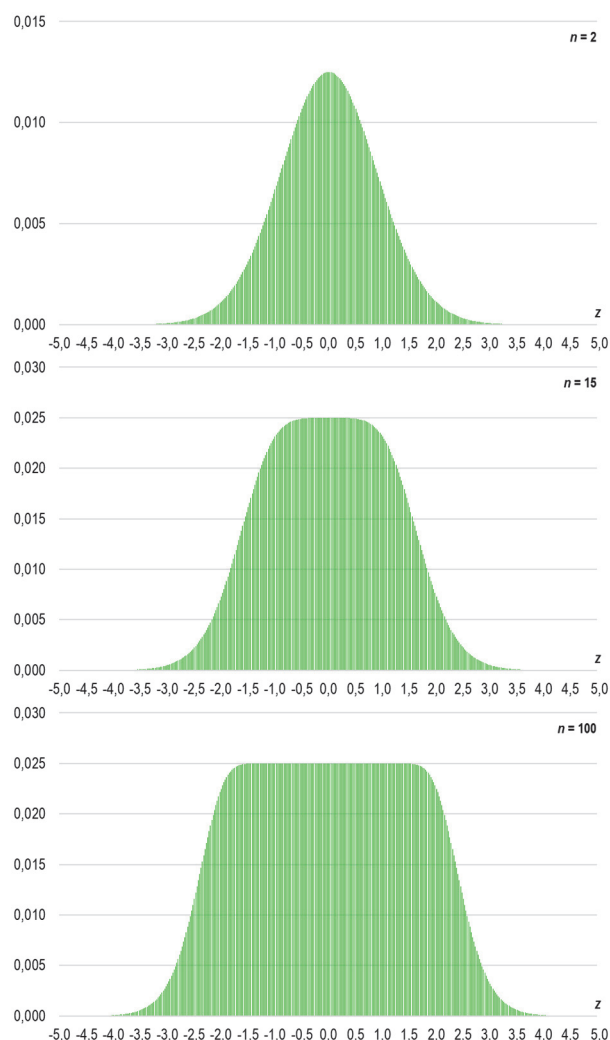
$$d_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - (1 - \Phi(z))^n - (\Phi(z))^n] dz.$$

Ker je ta integral izračunljiv le numerično, so vrednosti d_2 tabelirane (praviloma do velikosti vzorca 25 ali 30). Najdemo jih na koncu učbenikov SNP, na spletu, v paketih za SNP v statističnem programskem okolju R in drugod. Če je $n = 2$, se zgornja enačba poenostavi v

$$d_{2(n=2)} = \int_{-\infty}^{\infty} 2(\Phi(z) - \Phi^2(z)) dz \cong 1,128.$$

Ker bomo v celotnem prispevku uporabljali preproste simulacije z elektronsko preglednico Excel, da bodo razumljive čim širšemu krogu ljudi,^{3,4} bomo za začetek na tak način (približno, a precej natančno) izračunali vrednosti d_2 za različne velikosti vzorca. Uporabimo Riemannovo vsoto, tj. seštevanje ploščin zelo ozkih pravokotnikov, zloženih drug zraven drugega pod krivuljo, pod katero želimo izračunati ploščino.

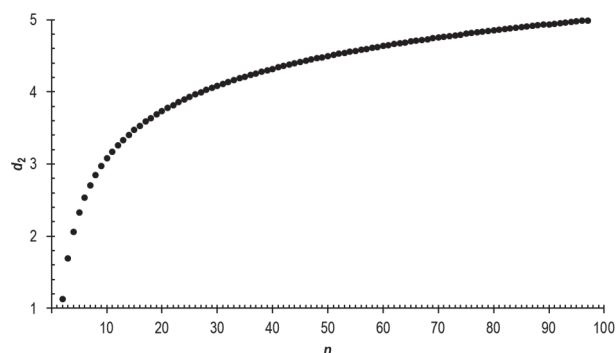
V prvi priloženi preglednici je uporabljena širina pravokotnika (tj. korak spremembe z) 0,025 za vrednosti z od -5 do 5. Excelova formula za ploščino posameznega pravokotnika je prikazana v celici D1 in kopirana po tabeli z ustreznim naslavljanjem celic. V celici A1 (ki ima zeleno ozadje) izberemo n med 2 in 100 ter opazujemo, kako se spreminja oblika funkcije, pod katero računamo ploščino. Zvonasta oblika pri $n = 2$, ki je podobna funkciji gostote standardne normalne porazdelitve, postaja z naraščanjem n pri vrhu vse bolj sploščena, hkrati pa se maksimum funkcije (ki je pri $z = 0$) večja. Pri $n = 15$ je vrh že sploščen, maksimum pa praktično že doseže vrednost 0,025 (s korakom spremembe z ni povezana, enaki sta slučajno), ki se ji nato sicer še naprej asimptotično približuje, a je nikoli ne preseže (slika 1).



Slika 1 Izračun konstante d_2 za $n=2$ (zgoraj), $n = 15$ (v sredini) in $n = 100$ (spodaj) z Riemannovo vsoto.

Vsote stolpcev, ki dajo vrednosti d_2 , so v zadnji vrstici (da ima številko 404, ne pomeni ničesar slabega). Dobljeno odvisnost d_2 od velikost vzorca prikazuje

slika 2. Omeniti velja še, da d_2 pri velikosti vzorca okrog 30 doseže vrednost 4, ki se jo je včasih uporabljalo za grobo oceno standardnega odklona kot četrtnine razpona podatkov.⁵



Slika 2 Odvisnost konstante d_2 od velikosti vzorca.

Za vzorce velikosti 2 iz standardne normalne porazdelitve (katere standardni odklon je enak 1) je povprečni razpon torej (asimptotično) enak d_2 . Na področju SNP se vrednost d_2 za $n = 2$ uporablja za oceno standardnega odklona poljubno velikega vzorca tako, da se iz njega vzame $n - 1$ podvzorcev dveh zaporednih vrednosti. Govorimo o povprečnem drsečem razponu (PDR; *ang.* average moving range) in vrednost s ocenimo kot

$$s_{PDR} = \frac{PDR}{1,128}.$$

V preddigitalnih časih je bilo zaposlenim v proizvodnji na tak način lažje ocenjevati standardni odklon (in na podlagi tega izdelovati kontrolne karte) kot z običajnim obrazcem. Poleg računske preprostosti ima tak pristop prednost pred običajnim tudi v smislu robustnosti⁶ (tj. »odpornosti« na osamelce in izrazito asimetričnost porazdelitve, vsaj za majhne vzorce), a s to problematiko se tukaj ne bomo ukvarjali. Posvetili se bomo predpostavki cenilke standardnega odklona na podlagi drsečega razpona, da so zaporedna opazovanja med seboj neodvisna, torej da (statistično rečeno) podatki niso avtokorelirani. S simulacijami bomo skušali ugotoviti, kako se s_{PDR} obnese v primerjavi z drugimi cenilkami v primeru »skakajočih« oziroma »nihajočih« podatkov, za katere je značilna visoka avtokorelacija.

Metode

Vse simulacije vsebuje druga priložena preglednica. Tudi ta je interaktivna z dinamičnim grafičnim prikazom, ki se spreminja glede na uporabnikovo izbiro. Združuje dve vrsti simulacij, poimenovani »skupine« in »nihanje«. Obe sta razdeljeni na dva sklopa glede na standardni odklon (0,1 ali 0,25)

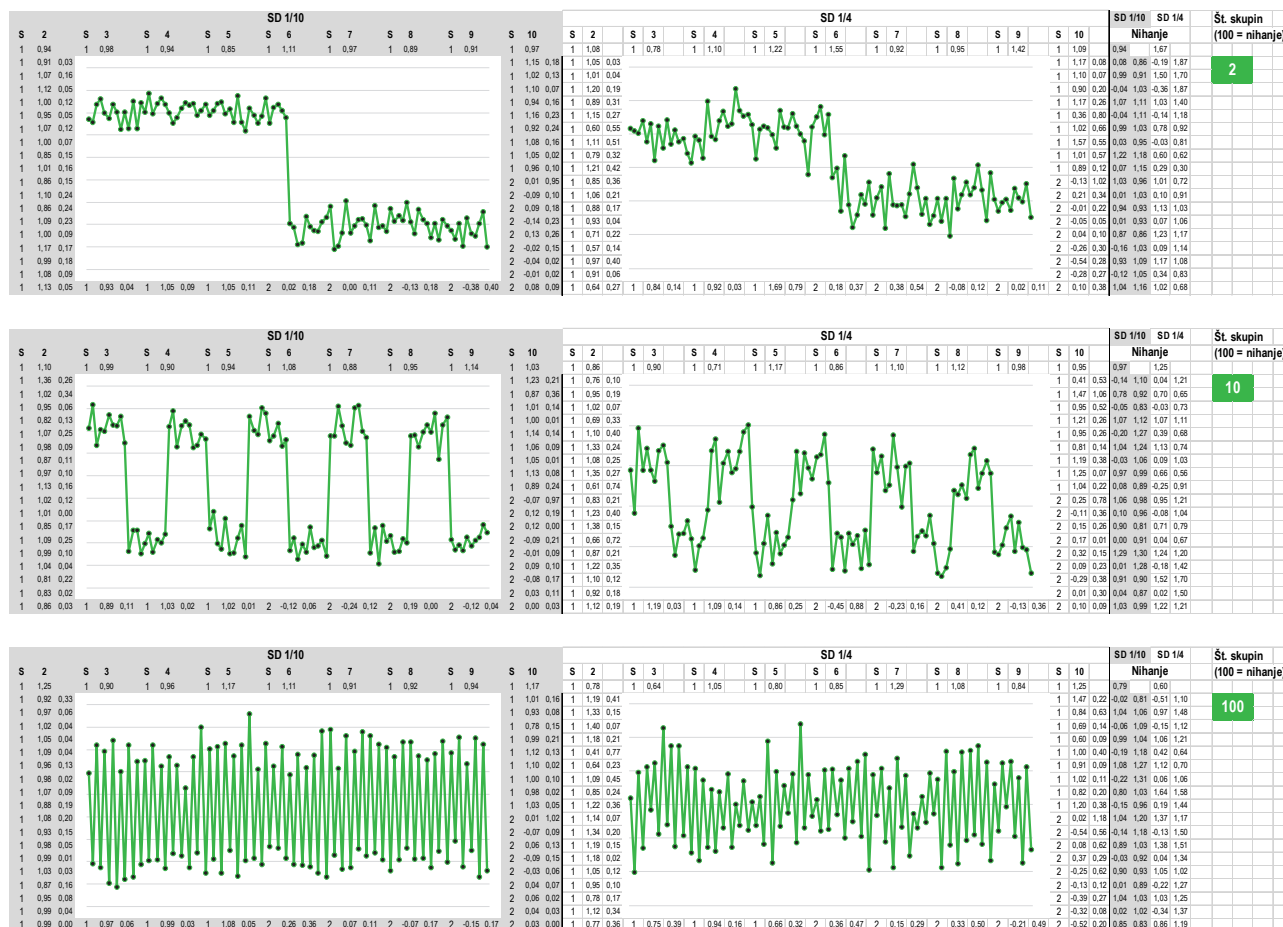
normalne porazdelitve (s povprečjem 0), iz katere so vzete slučajne vrednosti, uporabljene v nadaljnjih izračunih. Simulacije temeljijo na Excelovem izrazu $\text{NORMSINV}(\text{RAND}())$, torej slučajni vrednosti med 0 in 1 kot ploščini pod standardno normalno porazdelitvijo, pretvorjeni v ustrezno vrednost z , ki jo nato delimo z 10 oziroma 4, da dobimo slučajno spremenljivko z želenim standardnim odklonom. Pogoji simulacij so nanizani v stolpcih preglednice; vrstic s simuliranimi podatki pod vsakim pogojem je 100. Med prikazom procesa, ki mu povprečje »skače« po krajših nizih vrednosti, in procesa, katerega vrednosti so izmenoma visoko nad in visoko pod povprečjem, izbiramo z vnosom števila skupin v celico BH4, ki ima zeleno ozadje (spustni meni onemogoča vnos neustreznega parametra).

- Skupine: izberemo lahko od 2 do 10 skupin, povprečje skače med 1 in 0, prištete so mu zgoraj opisane slučajne vrednosti; za take podatke je značilna visoka pozitivna avtokorelacija prvega reda, ki upada s številom skupin.
- Nihanje: prikazemo ga z izborom vrednosti 100 za število skupin; zgoraj opisane slučajne

vrednosti se izmenično prištevajo vrednosti 1 oziroma 0; za take podatke je značilna visoka negativna avtokorelacija prvega reda, ki ima višjo absolutno vrednost pri nižjem standardnem odklonu slučajnih vrednosti.

Zgornji del preglednice prikazuje slika 3. Prikazana je realizacija simulacije z dvema skupinama, desetimi skupinami in nihanjem. Grafikona se ob vsakem izračunu formul (ki ga sproži odpiranje ali shranjevanje preglednice ali pritisk na tipko F9) nekoliko spremenita (prikažeta novo realizacijo simulacij).

Na dnu preglednice (v vrsticah 103 do 139) so izračuni rezultatov simulacij in njihov prikaz. Poleg treh cenilk standardnega odklona (običajne, približno nepristranske in cenilke na podlagi drsečega razpona) je za vsako število skupin (in nihanje) izračunana avtokorelacija. Pri simulacijah podatkov v skupinah je za primerjavo izračunan tudi standardni odklon (kvadratni koren t. i. srednjega kvadrata, *ang.* within-group mean square) znotraj skupin pri enosmerni analizi variance.



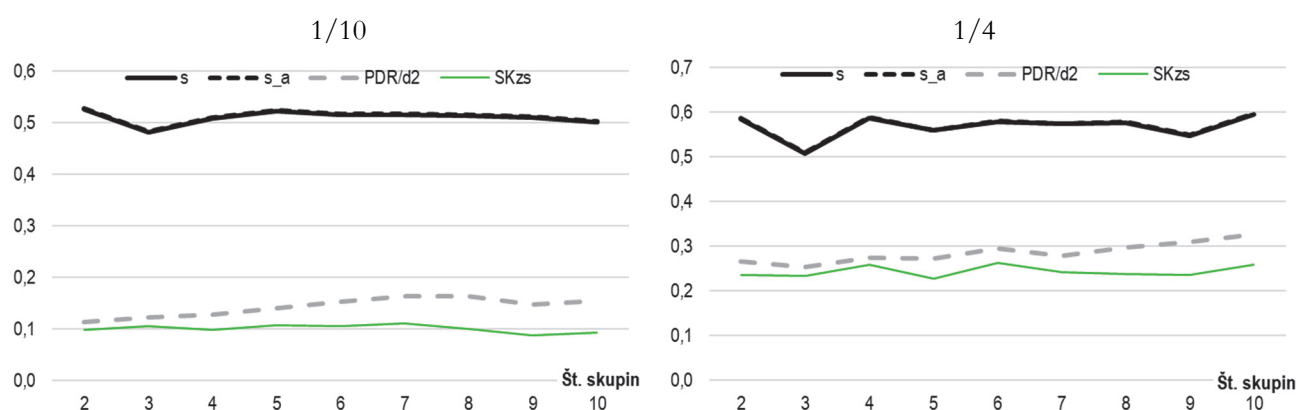
Slika 3 Zgornji del interaktivne dinamične elektronske preglednice s simulacijami (zgoraj izbrani dve skupini, v sredini 10 skupin in spodaj nihanje vrednosti).

Rezultati

Avtokorelacija je pri podatkih v skupinah pri standardnem odklonu prišteti slučajnih vrednosti 1/10 znašala od približno 0,65 pri desetih skupinah do 0,95 pri dveh skupinah, pri standardnem odklonu prišteti slučajnih vrednosti 1/4 pa od približno 0,60 pri desetih skupinah do 0,80 pri dveh skupinah. Pri nihajočih podatkih se je avtokorelacija pri standardnem odklonu prišteti slučajnih vrednosti

1/10 gibala okrog $-0,95$, pri standardnem odklonu prišteti slučajnih vrednosti 1/4 pa okrog $-0,80$.

Primerjavo cenilk standardnega odklona v eni realizaciji simulacij za podatke v skupinah prikazuje slika 4. Tabela 1 povzema rezultate simulacij z vidika uporabnosti dobljenih meja nadzora, tj. števila simuliranih podatkov, ki se glede na uporabljeno cenilko nahajajo izven meja nadzora na kontrolni karti za posamezne vrednosti (tj. več kot tri standardne odklone pod ali nad povprečjem). Rezultate simulacije nihajočih podatkov prikazuje tabela 2.



Slika 4 Primerjava cenilk standardnega odklona v eni realizaciji simulacij za podatke v skupinah (levo za standardni odklon prišteti slučajnih vrednosti 1/10, desno 1/4; s – popravljena cenilka standardnega odklona, s_a – približno nepristranska cenilka standardnega odklona, $PDR/d2$ – cenilka standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona, $SKzs$ – kvadratni koren srednjega kvadrata znotraj skupin pri enosmerni analizi variance).

Tabela 1 Rezultati simulacij podatkov v skupinah z vidika avtokorelacije prvega reda in uporabnosti meja nadzora, dobljenih z običajno cenilko in cenilko na podlagi drsečega razpona.

Št. odk. prišteti sluč. vrednosti		1/10										1/4									
Število skupin		2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Avtokorelacija 1. reda		0,93	0,91	0,90	0,89	0,85	0,88	0,82	0,81	0,80	0,81	0,79	0,75	0,68	0,73	0,65	0,65	0,64	0,62		
Število podatkov izven	s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
meja nadzora na podlagi	s_{PDR}	97	93	88	68	60	62	54	52	52	19	14	12	9	12	5	6	5	4		

Oznaki: s – popravljena cenilka standardnega odklona; s_{PDR} – cenilka standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona.

Tabela 2 Rezultati simulacije nihajočih podatkov.

St. odk. prišteti slučaj. vrednosti		1/10	1/4
Avtokorelacija 1. reda		-0,96	-0,78
Ocenjeni standardni odklon	s	0,52	0,58
	s_a	0,52	0,59
	s_{PDR}	0,90	0,93
Število podatkov izven meja nadzora na podlagi	s	0	0
	s_a	0	0
	s_{PDR}	0	0

Oznake: s – popravljena cenilka standardnega odklona; s_a – približno nepristranska cenilka standardnega odklona; s_{PDR} – cenilka standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona.

Razprava

Cenilka standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona je ustrežnejša od običajne in približno nepristranske cenilke za proces, ki se mu periodično (v kratkih nizih) spreminja povprečje (kar se odraža v visoki pozitivni avtokorelaciji). V tem primeru cenilka na podlagi povprečnega drsečega razpona ocenjuje predvsem standardni odklon okoli »trenutnega povprečja« in v znatni meri izloči vpliv »skakanja povprečja«. To je analogno enosmerni analizi variance, kjer celotno variabilnost razdelimo na variabilnost med skupinami in variabilnost znotraj skupin, pri čemer običajna cenilka s (in tudi približno nepristranska cenilka s_a)

ocenjuje celotno variabilnost, cenilka na podlagi PDR pa (skoraj samó) variabilnost znotraj skupin. Za razliko od običajne in približno nepristranske cenilke, ki sta mnogo večji, cenilka na podlagi PDR vodi do smiselnih meja nadzora na kontrolni karti za posamezne vrednosti.

Pri visoki negativni avtokorelaciji, tj. procesu s konstantnim povprečjem in varianco, a nihajočimi vrednostmi, je cenilka na podlagi PDR še mnogo večja od običajne in približno nepristranske. To vodi do še širših meja nadzora na kontrolni karti za posamezne vrednosti, ki so že pri drugih dveh cenilkah preširoke, da bi lahko zaznali, da proces ni pod nadzorom (pri takih podatkih namreč nedvomno ni).

Čeprav je problem avtokorelacije pri kontrolnih kartah že dolgo in dobro znan,⁷ je tej temi posvečene razmeroma malo znanstvene literature. Rešitve se bolj kot na običajne (tj. Shewhartove) kontrolne karte nanašajo na naprednejše kontrolne karte na podlagi kumulativne vsote (*ang.* cumulative sum – CUSUM) ali eksponentno uteženega drsečega povprečja (*ang.* exponentially weighted moving average – EMWA).^{8,9} Ne glede na to so simulacije pokazale, da je tudi najstarejša in najpreprostejša kontrolna karta, tj. Shewhartova karta za posamezne vrednosti, lahko smiselna in uporabna tudi za podatke z visoko pozitivno avtokorelacijo.

Zaključek

Prispevek uvodoma povzame matematične osnove ocenjevanja standardnega odklona, nato pa predstavi ocenjevanje standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona. Gre za pristop, ki je uveljavljen na področju statističnega nadzora procesov oziroma izdelave kontrolnih kart, na ostalih področjih statistike pa je manj znan. Opravljene simulacije imajo skupaj s priloženima interaktivnima elektronskima preglednicama predvsem poučen namen, kažejo pa tudi na uporabnost obravnavanega pristopa za procese, za katere je značilna visoka pozitivna avtokorelacija.

Statistične modele in analize, ki jih izdelujejo in uporabljajo ljudje, bodo žal najbrž tudi na področju odločanja v zvezi s procesi zelo kmalu zasenčili oziroma povsem nadomestili samodejni računalniški postopki, ki so znani kot prepoznavanje vzorcev,

strojno učenje oziroma umetna inteligenca.^{10,11} A za zdaj k sreči ostaja v ocenjevanju standardnega odklona oziroma širše, v statistični analizi podatkov nasploh, vsaj nekaj človeške ustvarjalnosti (če že ne umetnosti). Zato povzemimo temo prispevka na tak način – in morda bo ostala v trajnejšem spominu ...



Reference

1. Bolch BW: More on unbiased estimation of the standard deviation. *Am Stat* 1968; 22(3): 27.
2. Brugger RM: A note on unbiased estimation on the standard deviation. *Am Stat* 1969; 23(4): 32.
3. Fraser C: *Business statistics for competitive advantage with Excel and JMP: basics, model building, simulation, and cases*. Cham 2024: Springer.
4. Ibarra LF. *Simulation and statistics with Excel: an introduction to business students*. Boca Raton 2024: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781032701554>
5. van Belle G. *Statistical rules of thumb* (2nd ed.). Hoboken: 2008: Wiley.
6. Wheeler DJ: *Advanced topics in statistical process control*. Knoxville 1995: SPC Press.
7. Montgomery DC, Mastrangelo CM: Some statistical process control methods for autocorrelated data. *J Qual Technol* 1991, 23(3): 179-193.
8. Qiu P, Li W, Li J. A new process control chart for monitoring short-range serially correlated data. *Technometrics* 2007; 62(1): 71-83.
9. Zhang NF. A statistical control chart for stationary process data. *Technometrics* 1998; 40(1): 24-38.
10. García E, Peñabaena-Niebles R, Jubiz-Díaz M, Perez-Tafur A. Concurrent control chart pattern recognition: a systematic review. *Mathematics* 2022; 10(6): 934. <https://doi.org/10.3390/math10060934>
11. Zan T, Jia X, Guo X, Wang M, Gao X, Gao P. Research on variable-length control chart pattern recognition based on sliding window method and SECNN-BiLSTM. *Sci Rep* 2025, 15:5921. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-86849-4>