

Gaj Vidmar, Jakob Peterlin

Ocenjevanje standardnega odklona na podlagi zelo majhnih vzorcev

Povzetek. Ocenjevanje standardnega odklona na podlagi razpona ali povprečnega drsečega razpona (PDR), ki vključuje konstanto d_2 , je ključno v statističnem nadzoru procesov, a se zelo redko uporablja na drugih področjih statistike. Prispevek obravnava ustreznost teh dveh cenilk in približno nepristranske cenilke (tj. deljenja z $n - 1,5$ namesto z $n - 1$ pri oceni variance), ki predpostavljajo normalno porazdelitev, v primerjavi z običajno cenilko (tj. kvadratnim korenom nepristranske ocene variance) za zelo majhne vzorce iz štirih teoretičnih porazdelitev, pri čemer so uporabljene interaktivne simulacije v Excelu. Rezultati kažejo, da sta pri normalno porazdeljenih podatkih cenilki na podlagi razpona in PDR ustrežnejši od običajne cenilke za $n \leq 11$. Pri enakomerno porazdeljenih podatkih sta pristopa z razponom in PDR boljša za $n \leq 5$, pri večjih vzorcih pa je zlasti pristop z razponom neustrezen. Podobno velja za arkussinusno porazdelitev (ki ima obliko črke U). Pri lognormalnih (tj. zelo asimetričnih) podatkih je med obravnavanimi v splošnem najustreznejša približna nepristranska cenilka standardnega odklona za predpostavljeno normalno porazdelitev.

Ključne besede: varianca; verjetnostne porazdelitve; cenilke; simulacije; elektronske preglednice.

Estimating Standard Deviation from Very Small Samples

Abstract. Estimation of standard deviation from range or average moving range (AMR), which involves the d_2 constant, is essential in statistical process control but very rarely applied in other fields of statistics. We explore the feasibility of those two estimators and the approximate unbiased estimator (i.e., division by $n - 1.5$ instead of $n - 1$ when estimating variance), which all assume normal distribution, in comparison with the usual estimator in very small samples from four theoretical distributions, whereby interactive simulations in Excel are used. The results show that with normally distributed data, the range- and AMR-based estimators outperform the usual estimator for $n \leq 11$. With uniformly distributed data, the range and AMR approach are better for $n \leq 5$, while in larger samples especially the range approach does not work well. The results for the arcsine (U-shaped) distribution are similar. With lognormal (i.e., highly skewed) data, the approximate unbiased standard deviation that assumes a normal distribution performs the best among the studied estimators.

Key words: variance; probability distributions; estimators; simulations; spreadsheets.

■ Infor Med Slov 2025; 30(1-2): 24-27

Institucije avtorjev / Authors' institutions: Medicinska fakulteta, Univerza v Ljubljani (GV, JP); Univerzitetni rehabilitacijski inštitut Republike Slovenije Soča, Ljubljana (GV); Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Univerza na Primorskem, Koper (GV).

Kontaktna oseba / Contact person: prof. dr. Gaj Vidmar, URI Soča, Linhartova 51, 1000 Ljubljana, Slovenija. E-pošta / E-mail: gaj.vidmar@ir-rs.si.

Prispelo / Received: 19. 12. 2025. Sprejeto / Accepted: 19. 1. 2026.

Uvod

Za oceno standardnega odklona verjetnostne porazdelitve zvezne slučajne spremenljivke na podlagi vzorca velikosti n obstaja več možnosti. Običajno se uporablja t. i. popravljeno cenilko (s), ki je kvadratni koren nepristranske ocene variance (tj. vsote kvadriranih odklonov od povprečja, deljene z $n - 1$).

Nepistranska cenilka standardnega odklona je s/ϵ , kjer je korekcijski faktor ϵ odvisen od porazdelitve. Pri normalni porazdelitvi je ϵ odvisen le od n ,¹ a se kljub temu zelo redko uporablja v statistični praksi. Približno nepristransko cenilko za normalno porazdelitev (s_{PNP}) dobimo, če vsoto kvadriranih odklonov od povprečja namesto z $n - 1$ delimo z $n - 1,5$.^{2,3}

Na področju statističnega nadzora procesov se pri izdelavi kontrolne karte za posamezne vrednosti standardni odklon oceni na podlagi povprečnega drsečega razpona (PDR) po obrazcu PDR / d_2 .^{3,4,5} Konstanta d_2 temelji na znanem odnosu med pričakovano vrednostjo razpona in standardnim odklonom normalne porazdelitve.^{3,6} Odnos običajno izpeljemo na podlagi porazdelitve studentiziranega razpona,⁷ da pa se ga izpeljati tudi na podlagi polovične normalne porazdelitve.⁸

Zgornji obrazec je splošen v smislu poljubno velikega vzorca in vrednosti d_2 so tabelirane oziroma numerično izračunljive v odvisnosti od n .³ V posebnem primeru PDR, tj. izračuna iz zaporednih dvojic vrednosti, je dejanska velikost vzorca $n = 2$, ki ji ustreza vrednost $d_2 = 1,128$, torej je cenilka standardnega odklona $s_{PDR} = PDR / 1,128$. Ta cenilka predpostavlja normalno porazdelitev podatkov, a je robustna v smislu, da je ustrezna tudi za pozitivno avtokorelirane³ in blago asimetrične podatke.⁶

Metode

Ustreznost različnih cenilk standardnega odklona smo proučili na podlagi obsežnih simulacij z elektronsko preglednico Microsoft® Excel 2016. Zaradi lažje razumljivosti in preverljivosti smo uporabili zgolj formule brez programiranja v okolju VBA. Uporaba Excela za statistične namene je bila v preteklosti sicer deležna utemeljene kritike,⁹ a v novejših verzijah je generator psevdoslučajnih števil zamenjan z ustreznim, izboljšani so numerični algoritmi statističnih funkcij in praktično odpravljene omejitve glede velikosti delovnih listov, zato se je Excel uveljavil kot orodje, s katerim lahko izdelamo statistične simulacije, ki so razumljive široke krogu

ljudi, hkrati pa dovolj ponovljive in preverljive za raziskovalne namene.¹⁰⁻¹²

V simulacijah smo proučili štiri verjetnostne porazdelitve:

- standardno normalno (tj. normalno s parametroma $\mu = 0$ in $\sigma = 1$),
- enakomerno (na intervalu od 0 do $2\sqrt{3}$, da znaša njen standardni odklon 1),
- arkussinusno (osnovno obliko z definicijskim območjem med 0 in 1, ki ima standardni odklon $1/\sqrt{8}$) in
- lognormalno (s povprečjem $1/\sqrt{e-1}$ in standardnim odklonom 1).

Za vsako porazdelitev smo izdelali delovni zvezek z 10.000 vrsticami, v katerih je bilo po 11 slučajnih števil, s čimer smo dobili 10.000 vzorcev velikosti 2 do 11. Za vsak vzorec smo izračunali štiri cenilke standardnega odklona:

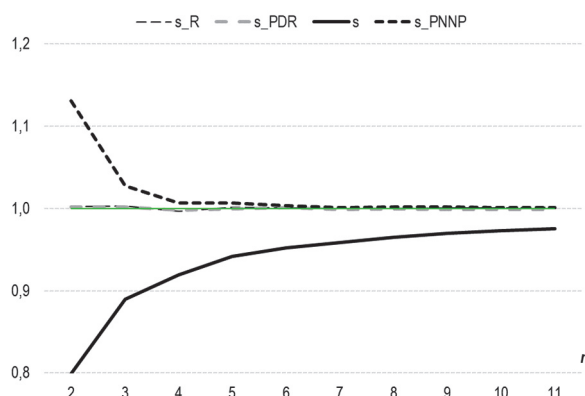
- običajno (tj. popravljeno, s),
- približno nepristransko za predpostavljeno normalno porazdelitev (s_{PNP}),
- na podlagi drsečega razpona za predpostavljeno normalno porazdelitev (s_{PDR}) in
- na podlagi razpona za predpostavljeno normalno porazdelitev (s_R).⁵

Ciljne vrednosti σ , s katerimi smo primerjali dobljene ocene standardnega odklona, smo dobili tako, da smo 10.000 slučajnih vrednosti za vsak n obravnavali kot populacijo. Vsi uporabljeni delovni zvezki, v katerih so opisane simulacije dopolnjene z dodatnimi izračuni, preverjanji, grafičnim prikazom porazdelitve vseh slučajnih vrednosti in spletnimi viri za razumevanje uporabljenih Excelovih formul, so na voljo v [priloženem stisnjem arhivu](#).

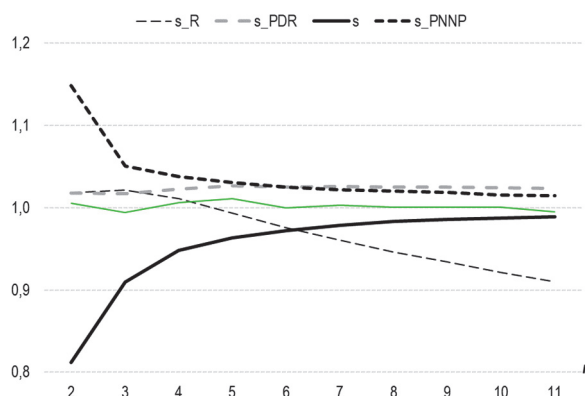
Rezultati

Rezultate simulacij povzemajo slike 1, 2, 3 in 4. Na njih je za vsako velikost vzorca prikazano povprečje obravnavanih štirih cenilk.

Simulacije kažejo, da sta pri normalno porazdeljenih podatkih cenilki standardnega odklona na podlagi PDR in razpona v povprečju ustrežnejši od običajne pri $n \leq 11$ (in še nekoliko večjih vzorcih), v manjši meri pa je za $n \leq 5$ od običajne ustrežnejša tudi približno nepristranska cenilka. To se sklada s priporočilom, da je meje nadzora za kontrolno karto za posamezne vrednosti potrebno izračunati na podlagi kratkoročne cenilke razpršenosti proces, kakršna je PDR.¹³



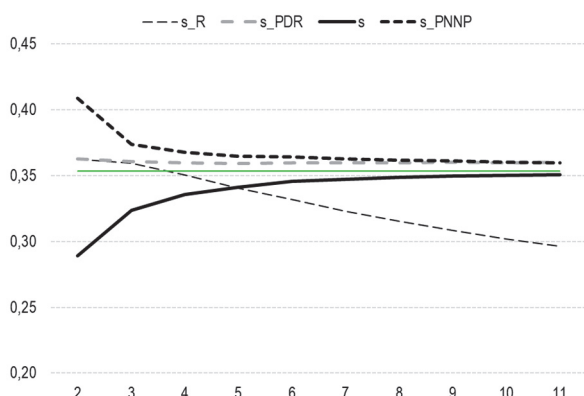
Slika 1 Cenilke standardnega odklona simuliranih podatkov iz standardne normalne porazdelitve za vzorce velikosti 2 do 11 (zeleni črta označuje ciljno vrednost σ).



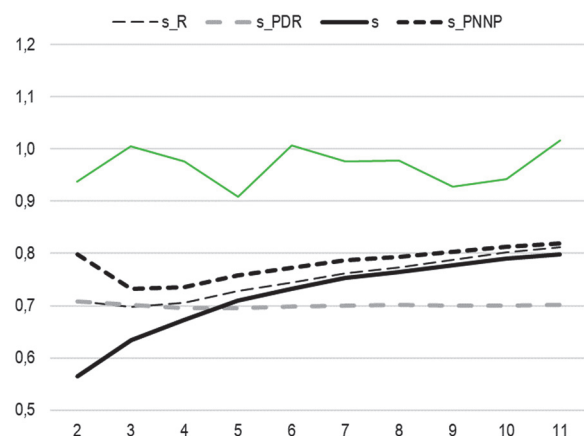
Slika 2 Cenilke standardnega odklona simuliranih podatkov iz enakomerne porazdelitve za vzorce velikosti 2 do 11 (zeleni črta označuje ciljno vrednost σ).

Za enakomerno porazdeljene podatke se cenilke na podlagi razpona in PDR v povprečju obnesejo boljše od običajne in približno nepristranske za $n \leq 5$, a slabše od njih pri večjih vzorcih (pri katerih postaja razlika z večanjem vzorca zelo velika za cenilko na podlagi razpona). Za arkusinusno porazdelitev, ki ima obliko črke U, so rezultati zelo podobni kot za enakomerno porazdelitev, le da se cenilka standardnega odklona na podlagi PDR pri $n > 5$ obnese enako dobro kot približno nepristranska.

Pri izrazito asimetričnih podatkih sta pristopa na podlagi razpona in PDR v povprečju ustrežnejša od običajnega za velikosti vzorca od 2 do 4. Za $n > 5$ sta običajna cenilka in cenilka na podlagi razpona v povprečju praktično enaki, cenilka na podlagi PDR pa je neustrezna. Približno nepristranska cenilka na podlagi predpostavke o normalni porazdelitvi je v povprečju najustrežnejša, a še vedno pristranska v smislu prenizke ocene.



Slika 3 Cenilke standardnega odklona simuliranih podatkov iz arkusinusne porazdelitve za vzorce velikosti 2 do 11 (zeleni črta označuje ciljno vrednost σ).



Slika 4 Cenilke standardnega odklona simuliranih podatkov iz lognormalne porazdelitve za vzorce velikosti 2 do 11 (zeleni črta označuje ciljno vrednost σ).

Razprava

Razmeroma preproste in tudi za programiranje nevesčega bralca razumljive simulacije so pokazale, da je pri izrazito majhnih vzorcih standardni odklon bolj smiselno ocenjevati drugače, kot smo tega vajeni iz osnov statistike. Glede lognormalne porazdelitve je potrebno poudariti, da bi bili rezultati za levo asimetrično verjetnostno porazdelitev (tj. zrcalne oblike) enaki, saj množenje z -1 ne spremeni variance.

Glavna pomanjkljivost raziskave je osredotočenost na matematično upanje cenilk kot merilo njihove (ne)pristranskosti, ni pa upoštevana razpršenost cenilk med simulacijami. V ta namen bi bilo za vsako cenilko za vsako velikost vzorca potrebno analizirati standardni odklon ocenjenih vrednosti od ciljne (tj. korenjeno povprečno kvadrirano napako, angl. *Root Mean Square Error, RMSE*).

Nadgradnjo študije bi predstavljal tudi izračun konstante d_2 za izbrane verjetnostne porazdelitve (enakomerno, arkussinusno in lognormalno) za uporabljene (in po možnosti tudi večje) velikosti vzorca. Doslej so konstanto d_2 namreč ocenili poleg normalne le še za enakomerno porazdelitev, pa še to le za $n = 3$.¹⁴ V ta namen bi bilo potrebno zahtevno numerično integriranje s programsko kodo v sodobnem matematičnem oziroma statističnem okolju, pri čemer bi se bolj kot R¹⁵ zaradi hitrosti obnesla Julia.¹⁶ Omenimo še, da je bilo ocenjevanje standardnega odklona na podlagi razpona včasih pomembno predvsem za hitre približne ročne izračune,¹⁷ v novjšem času pa je aktualno na področju meta analize.¹⁸

Zaključek

Rezultati opravljenih simulacij so poleg teoretičnega pomena tudi praktično uporabni. Če imamo opravka z najmanjšimi vzorci (velikosti od 2 do 4) iz porazdelitev, ki odstopajo od normalne, je smiselno oceniti standardni odklon na podlagi razpona ali povprečnega drsečega razponu z uporabo predpostavke o normalni porazdelitvi. Približna nepristranska cenilka standardnega odklona se je v splošnem obnesla od običajne, saj deluje bolje pri vzorcih velikosti od 4 do 10 ter postane praktično enaka običajni pri velikosti vzorca nad 10.

Reference

1. Bolch BW: More on unbiased estimation of the standard deviation. *Am Stat* 1968; 22(3), 27. <https://doi.org/10.1080/00031305.1968.10480476>
2. Brugger RM: A note on unbiased estimation on the standard deviation. *Am Stat* 1969; 23(4): 32. <https://doi.org/10.1080/00031305.1969.10481865>
3. Vidmar G, Peterlin J: Ustreznost ocene standardnega odklona na podlagi povprečnega drsečega razpona za kontrolno karto v primeru avtokoreliranih podatkov. *Infor Med Slov* 2024; 29(2): 27-42.
4. Nelson LS: Control charts for individual measurements. *J Qual Technol* 1982; 14(3), 172-173. <https://doi.org/10.1080/00224065.1982.11978811>
5. Woodall WH, Montgomery DC: Using ranges to estimate variability. *Qual Eng* 2000; 13(2), 211-217. <https://doi.org/10.1080/08982110108918643>
6. Wheeler DJ: *Advanced topics in statistical process control*. Knoxville 1995: SPC Press.
7. Harter HL: Tables of range and studentized range. *Ann Math Statist* 1960; 31(4): 1122-1147. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705684>
8. Baudin M: *The math behind the process behavior chart*. <https://michelbaudin.com/2019/03/02/the-math-behind-the-process-behavior-chart> (8. 2. 2026)
9. Mélard G: On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2010. *Comput Stat* 2014; 29: 1095-1128. <https://doi.org/10.1007/s00180-014-0482-5>
10. Guerrero H: *Excel data analysis: Modeling and simulation* (2nd ed.). New York 2019: Wiley. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-01279-3>
11. Fraser C: *Business statistics for competitive advantage with Excel and JMP: Basics, model building, simulation, and cases*. Cham 2024: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-42555-4>
12. Ibarra LF: *Simulation and statistics with Excel: An introduction to business students*. Boca Raton 2024: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781032701554>
13. Rigdon SE, Cruthis EN, Champ CW: Design strategies for individuals and moving range control charts. *J Qual Technol* 1994; 26(4): 274-287. <https://doi.org/10.1080/00224065.1994.11979539>
14. Ferreira DF, Chaves LM, de Souza DJ: The theory of the internally studentized range revisited. *Rev Bras Biom* 2018; 36(4): 802-826. <https://doi.org/10.28951/rbb.v36i4.308>
15. R Core Team: R: *A language and environment for statistical computing*. <https://www.R-project.org> (8. 2. 2026)
16. Bezanson J, Edelman A, Karpinski S, Shah VB: Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM Rev Soc Ind Appl Math* 2017; 59(1): 65-98. <https://doi.org/10.1137/141000671>
17. van Belle G: *Statistical rules of thumb* (2nd ed.). Hoboken 2008: Wiley.
18. Pudar Hozo S, Djulbegovic B, Hozo I: Estimating the mean and variance from the median, range, and the size of a sample. *BMC Med Res Methodol* 2005; 5: 13. <https://doi.org/10.1186/1471-2288-5-13>